

DESARROLLO DE FAMILIAS JERARQUICAS DE ELEMENTOS FINITOS DE CLASE C^K

Avelino Samartín Quiroga

Departamento de Análisis de las Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Universidad de Santander

1. INTRODUCCION

Existen numerosas situaciones en la Técnica para las que es preciso resolver problemas de condiciones iniciales y contorno con una elevada exigencia de continuidad en las soluciones. Algunos ejemplos no exhaustivos se citan a continuación:

(a) Flexión de vigas y placas en el Análisis de las Estructuras (1).

La ecuación diferencial de cuarto orden en el dominio A de la estructura es:

$$k_i w_{,ii} = p \quad x \in A \subset \mathbb{R} \quad [1.1]$$

$$k_{ij} w_{,iijj} = p \quad x \in A \subset \mathbb{R}^2 \quad [1.2]$$

Con el conjunto de condiciones de contorno (caso estacionario) de tipo esencial o cinemático:

$$w = \bar{w} \quad \text{para} \quad x \in \bar{A}_1 \subset \bar{A} \quad [1.3]$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \bar{w}_n \quad \text{para} \quad x \in \bar{A}_2 \subset \bar{A}$$

y las condiciones de contorno de tipo natural o estático

$$k_n \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + k'_n \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial n} = \bar{R} \quad \text{para} \quad x \in \bar{A}'_1 \subset \bar{A} \quad [1.4]$$

$$k_n \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + k''_n \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \bar{M} \quad \text{para} \quad x \in \bar{A}'_2 \subset \bar{A}$$

La solución de la formulación débil de este problema pertenece a H^2 .

(b) Problemas de láminas.

Utilizando la teoría de las láminas rebajadas y placa curvada de Muskhari y Vlasov (2), se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - \nabla_k^2 \phi &= Z \\ Eh\nabla_k^2 w + \nabla^4 \phi &= 0 \end{aligned} \quad [1.5]$$

con las pertinentes condiciones de borde (cuatro en cada punto del contorno, bien esenciales o naturales).

Las ecuaciones en el dominio pueden ser sustituidas por una única de octavo orden mediante la introducción de la función de Arbatsumyam.

$$w = \nabla^4 w$$

$$\phi = -Eh\nabla_k^2 w$$

$$\text{con } \nabla^2 = \left(\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right)_{,1} + \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right)_{,2} \right)$$

$$\nabla_k^2 = \left(\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{A_2}{A_1} K_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right)_{,1} + \left(\frac{A_1}{A_2} K_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right)_{,2} \right)$$

A_1 y A_2 parámetros de la primera forma fundamental de la superficie media de la lámina; K_1 y K_2 curvaturas principales y las líneas de coordenadas α_1 y α_2 son de curvatura:

$$D\nabla^8 w + Eh\nabla_k^4 w = 0 \quad [1.6]$$

La solución débil del problema de contorno [1.6] se sabe que pertenece al espacio H^4 .

Por otra parte aparecen en las aplicaciones numerosos problemas de interpolación con diferentes condiciones en los datos y en las funcio-

nes interpolantes, cuya solución puede llevarse a cabo mediante la utilización de elementos finitos con un elevado orden de continuidad (3). Se presentan a continuación algunos de estos ejemplos:

(c) Topografía.

A partir de los datos obtenidos de un trabajo taquimétrico, consistentes en las coordenadas (x,y) y la cota z de un conjunto de puntos del terreno, se intenta obtener las curvas de nivel representativas.

(d) Trazado de vías de comunicación.

El diseño del eje de una vía de comunicación -ferrocarril o carretera- puede ser de interés que se efectue de modo que sea lo mas suave posible (condiciones de seguridad y comodidad de la circulación). Normalmente el eje debe de satisfacer ciertas condiciones adicionales, tales como pasar por un conjunto de puntos definidos en planta, bien exactamente o dentro de un entorno de error.

(e) Definición geométrica de estructuras.

Existen estructuras, cuya forma compleja o arbitraria, se conoce en el diseño solamente en un conjunto descrito de secciones o puntos. Es preciso, obtener a partir de estos datos, una definición geométrica que utilice superficies continuas, en particular conocer la superficie media y las caras intradós y extrados de la estructura. Un caso típico de esta situación corresponde al diseño de presas bóvedas. En estas se conoce la geometría en una serie de arcos horizontales y ménsulas verticales y los valores de los espesores de la bóveda en algunas secciones. La definición adecuada de la presa requiere la obtención de una superficie suficientemente suave, sin bruscos cambios de curvatura, que contenga dentro de un margen de error los resultados anteriores, descritos en forma de puntos líneas o superficies.

(f) Reconocimiento caligráfico.

El problema consiste en restituir con la máxima fidelidad una estructura caligráfica mediante un mínimo de información digitalizada. Este pro

blema (1-D) puede ser extendido a situaciones de mayor dimensión (2-D y 3-D) correspondientes a obras pictóricas o fotografías y esculturas.

2. DEFINICIONES PREVIAS

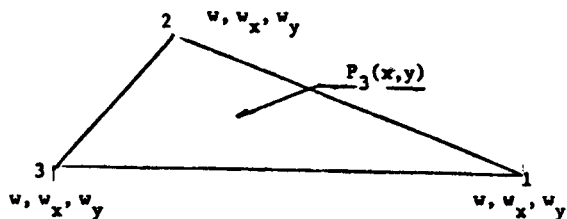
El método de los elementos finitos constituye en la actualidad una técnica matemática de discretización bien establecida (4). Su eficiencia se manifiesta en particular en la resolución de problemas de contorno, planteados en su formulación débil y en los problemas de determinación de extremales de funcionales. En estos casos el método de los elementos finitos proporciona de un modo automático las funciones coordenadas ψ_n precisas en las técnicas de Galerkin y Ryleigh-Ritz entre otras. Según el orden del problema de campo que se estudie se deben utilizar elementos finitos que satisfagan una serie de requerimientos de continuidad adecuados.

Los elementos finitos de clase C^k se caracterizan por la existencia de continuidad de sus derivadas hasta el orden k -simo inclusive, tanto en el interior como en la frontera y en los nudos del elemento.

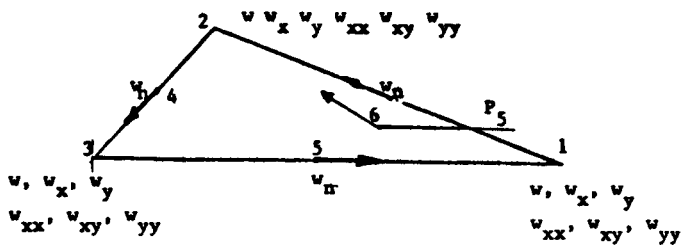
La definición anterior se aplica a los elementos denominados conformes o compatibles. A veces, los requisitos de continuidad a lo largo de la frontera del elemento no se mantienen y entonces este se designa por el término incompatible o no conforme. En otros casos, la continuidad en el interior del elemento puede ser de un orden menor a C^k , como ocurre en los supraelementos o elementos constituidos por polinomios a trozos. Elementos de Clough y Tocher(5).

Por último, en los nudos puede disponerse una mayor exigencia de continuidad que C^k , introduciendo nuevas incógnitas adicionales básicas con significado de nuevas derivadas en el nudo de la función de campo w . En esta situación el elemento se denomina hiperelemento (figura 1).

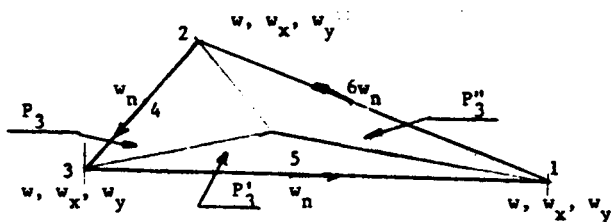
Los elementos finitos de clase C^k pueden ser utilizados como funciones base para la resolución mediante los métodos de Galerkin o Ritz de problemas de orden $m = k+1$, es decir, con derivadas hasta el orden m en la ecuación funcional. Como es sabido, las funciones bases deben ser H_m .



(a) Incompatible.



(b) Hiper elementos.



(c) Elemento de Clough-Felippa.

FIGURA 1.- Ejemplos de elementos triangulares 2-D (triangulares) de clases C^1 .

Evidentemente, existen otros métodos como la inmersión en un problema de orden inferior con restricciones adicionales, que pueden ser tratados mediante técnicas de Lagrange y penalización entre otras. En este contexto la utilización de la integración reducida y selectiva para problemas estructurales de clase C^1 (láminas y placas) constituye un procedimiento de indudable interés (6).

Conviene observar que la eficiencia computacional de un tipo determinado de elementos finitos no está directamente relacionada con el carácter compatible o incompatible del mismo. A veces elementos incompatibles son mas eficaces y existe una explicación intuitiva de esta propiedad. En efecto, elementos finitos incompatibles suelen ser mas flexibles que los conformes. Sin embargo, la convergencia monótonica e independiente de la configuración de la malla de elementos sólo esta asegurada a priori en los elementos conformes, en otros casos, pruebas como la descrita por Irons (patch test) deben de ser utilizadas (7). Una ventaja numérica de la monotonía de la convergencia reside en la posibilidad de utilizar fórmulas eficaces de extrapolación de resultados (8), basadas en esta propiedad.

Como, es sabido, existen dos posibilidades de convergencia en el método de los elementos finitos:

- (a) h -convergencia, que corresponde a la obtenida mediante el uso de mallas cada vez mas refinadas, es decir, cada una contiene a las anteriores y la dimensión máxima de los elementos disminuye de un modo concorde, pero conservando el tipo y funciones de forma de los elementos finitos.
- (b) h^k -convergencia, producida por el incremento sucesivo del orden de los polinomios de las funciones de forma o interpolación de cada elemento, conservando constante la configuración de la malla.

La consideración de este último tipo de convergencia, es el incentivo principal de la generación de familias jerárquicas de elementos finitos, es decir, conjunto de elementos finitos cuyas funciones de forma son de órdenes sucesivamente crecientes y cada una de ellas contiene a las anteriores

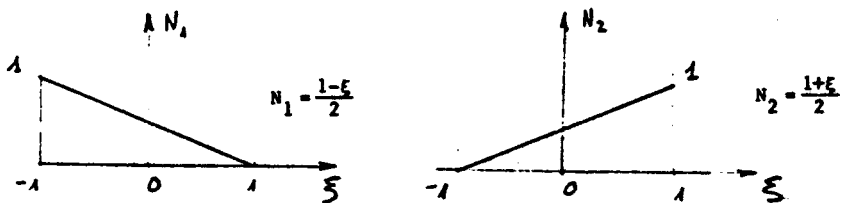
Las ventajas e inconvenientes de la utilización de familias jerárquicas de elementos finitos han sido discutidas en detalle en diferentes publicaciones. Aquí sólo se comenta la ventaja de una mayor aceleración de la convergencia, a costa de un incremento importante de computación, medida, entre otros aspectos, en mayores requerimientos de memoria (aumento del ancho de banda) y esfuerzo de cálculo (necesidad de un número creciente de puntos de integración de Gauss). La posibilidad de obtener valores satisfactorios para resultados que exigen un elevado orden de derivación y por lo tanto, con posibilidad de aparición de ruidos numéricos (esfuerzos cortantes en problemas de flexión de placas y láminas) presenta el inconveniente de una modelización grosera de la geometría, en particular del contorno, de la estructura.

Conviene recordar un aspecto de la convergencia. Esta depende del resultado que se estudia en el cálculo (en particular el orden de derivación) así como del punto donde se localiza el mismo. En general, se considera que en los puntos de Gauss (9) del elemento, los errores en los resultados son mínimos. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es más conveniente conocerlos en los nudos, por lo que fórmulas de extrapolación se suelen utilizar. A veces, se puede mediante procedimientos iterativos obtener una mejoría notable en el grado de exactitud de los resultados (10).

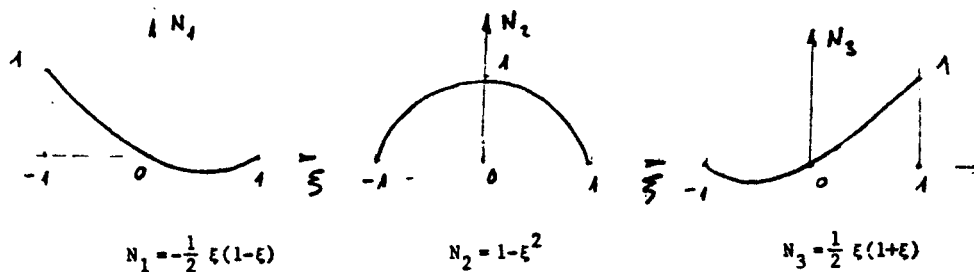
3. FAMILIAS JERÁRQUICAS DE ELEMENTOS C^0

Estas familias son bien conocidas por lo que sólo se resume en la figura 2, los elementos rectos 1-D, correspondientes a funciones polinómicas de Lagrange. Evidentemente otros tipos de familias de elementos C^0 pueden ser generadas. En la figura 3 se representa una de las numerosas posibilidades (11).

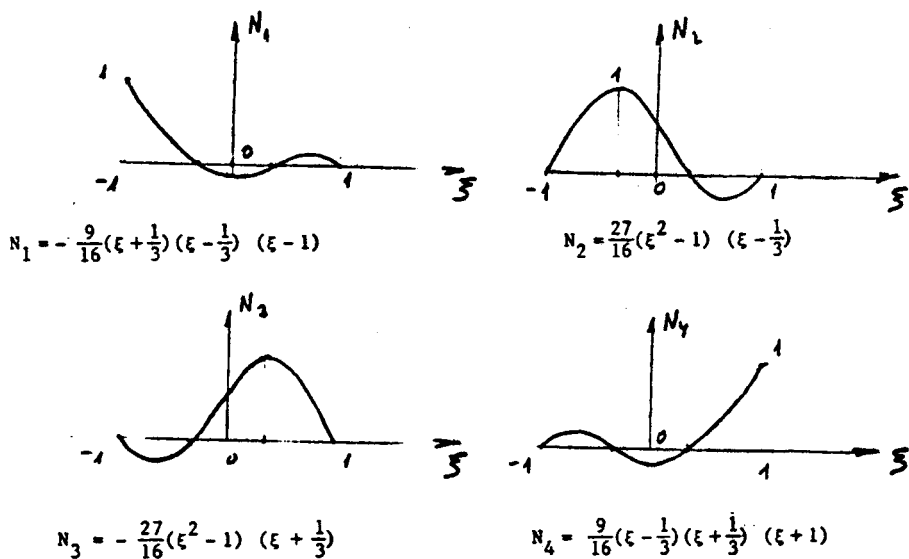
En relación con los elementos 2-D, familias para los dos tipos, triangulares y rectangulares, se representan en las figuras 4 y 5. Aquí se observa que existen dos posibilidades de familias jerárquicas -elementos Lagrangianos y serendipinos. Estos últimos son más adecuados computacionalmente. Sin embargo, conviene recordar que la velocidad de convergencia via



(a) Elementos lineales



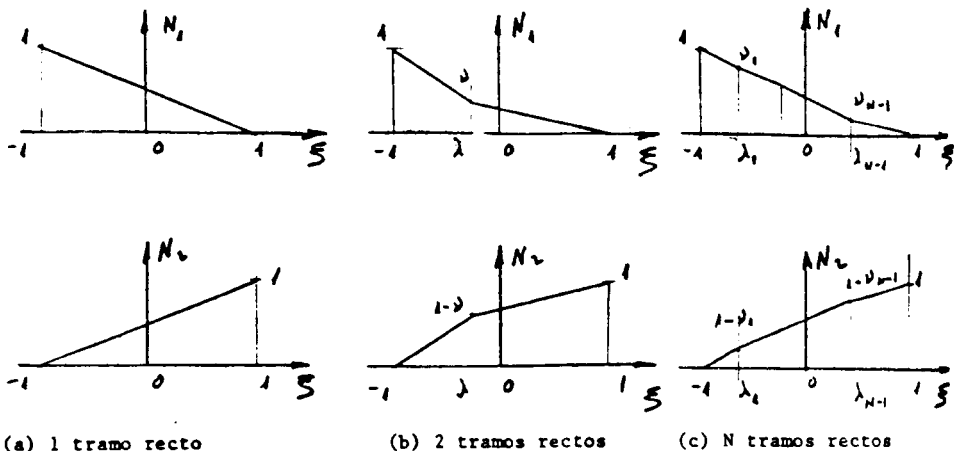
(b) Elementos cuadráticos



(c) Elementos cúbicos.

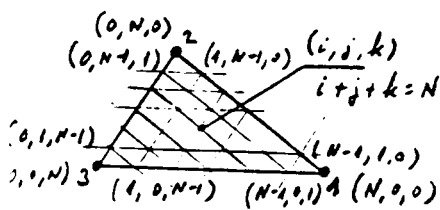
En general para n nudos: $N_i^n = L_i^n(\xi)$ con $L_i^n(\xi) = \frac{1_i^n(\xi)}{1_i^n(\xi_i)}$ con $1_i^n(\xi) = \frac{j=1}{n} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi - \xi_i)}$ y $\xi_i = 2 \frac{i-1}{n-1}$
 $(i = 1, 2, \dots, n)$

FIGURA 2.- Elementos 1-D de clase C^0 . (Lagrangianos).



Nota.— Los tramos pueden ser iguales o desiguales. En este último caso se pueden disponer de variables adicionales en el proceso de minimización.

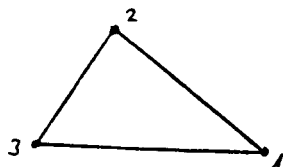
FIGURA 3.- Elementos 1-D de clase C^0 (funciones a trozos).



a) Triángulo general (notación).

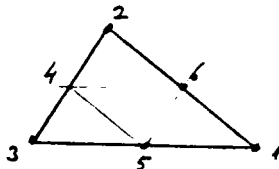
El nudo (i, j, k) tiene coordenadas $L_{1i}^N, L_{2j}^N, L_{3k}^N$ con $L_{1i}^N = \frac{i}{N}; L_{2j}^N = \frac{j}{N}; L_{3k}^N = \frac{k}{N}$.

La función de forma N_I correspondiente al nudo (i, j, k) es: $N_I = L_{1i}^i(L_1) L_{2j}^j(L_2) L_{3k}^k(L_3)$ con $L_{1i}^i(L_1)$ es el polinomio de Lagrange de grado i correspondiente al nudo L_{1i}^N y análogas para $L_{2j}^j(L_2)$ y $L_{3k}^k(L_3)$.



$$N_i = L_i$$

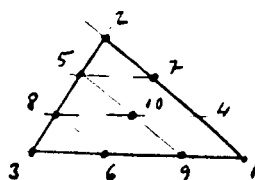
(b) CT



$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$$

$$N_4 = 4L_2L_3$$

(c) LT



$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_2$$

$$N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3$$

(d) QT

FIGURA 4.- Elementos triangulares lagrangianos.

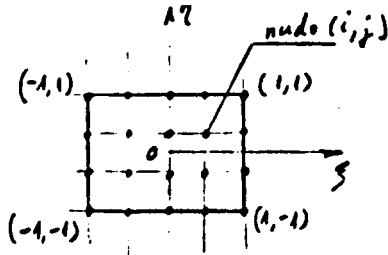
ne medida por el grado del polinomio completo contenido en las expresiones de las funciones de interpolación (12). Los elementos lagrangianos, producen a este respecto menor número de términos extra o espureos, respecto al polinomio completo (figura 6). Existe una extensa experimentación numérica sobre estos elementos (13), por lo que no se exponen aquí los resultados obtenidos.

4. FAMILIAS JERARQUICAS DE ELEMENTOS C^k

La mayoría de las familias jerárquicas descritas en diversas publicaciones, (10) y (12) se refieren a la clase C^0 comentados en el apartado anterior, que corresponden a expresiones sencillas. La complicación crece de un modo considerable al intentar la definición de las familias de clase C^k (con $k \geq 1$), como se comprueba en (14) y se observa en los siguientes apartados. En estos ha sido, en general preciso abandonar la determinación analítica de las funciones de forma y seguir un procedimiento numérico.

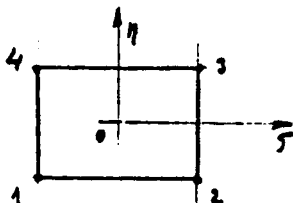
Como se ha indicado anteriormente, existen numerosos procedimientos, de obtención de elementos C^k . Sólo en el caso de $k = 1$ se han propuesto tantos elementos (en general para el cálculo de placas) que no se intenta siquiera aquí su revisión y catalogación. En particular, la deducción de elementos conformes C^k se suele llevar a cabo mediante alguna de las técnicas que se comentan a continuación. La mas simple consiste en incluir el planteamiento del problema funcional de orden $k+1$ en otro de orden inferior, mediante la introducción de las sucesivas restricciones funcionales (multiplicadores de Lagrange, técnicas de penalización, etc.). En este contexto la integración numérica selectiva y reducida debe ser considerada como un medio eficaz que evita los problemas de enmascaramiento numérico.

Otro método de obtención de elementos conformes que supone un exceso de continuidad está representado por los hiperelementos. En estos se introduce un número de parámetros coordinados mayor que el estrictamente necesario para la continuidad del problema (parámetros esenciales) y que en el caso de elementos de clase C^k estos parámetros corresponden a los valores nodales de todas las derivadas hasta el orden k inclusive.



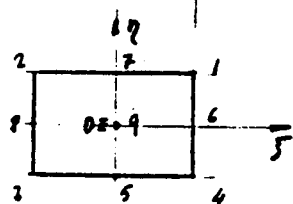
$$N_{ij}^{mn} = \xi_i^m(\xi) \eta_j^n(\eta)$$

(a) Elemento lagrangiano rectangulares.



$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$$

(b) Elemento lagrangiano y serenpidino bilineal con ξ_i η_i coordenadas del nudo i.



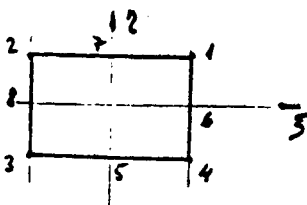
$$N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\xi^2 + \xi\xi_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\xi^2 + \eta\eta_i) \quad (i = 5, 7)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(\xi^2 + \xi\xi_i) \quad (i = 6, 8)$$

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

(c) Elemento lagrangiano de nueve nudos.



$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(-1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad (i = 5, 7)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i) \quad (i = 6, 8)$$

(d) Elemento serenpidino de ocho nudos.

FIGURA 5.- Elementos primitivos (cuadrilateros) de clase C^0 .

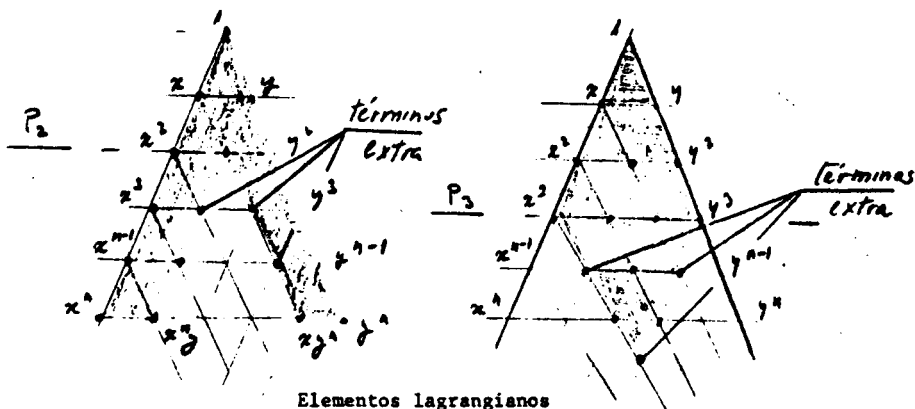


FIGURA 6.- Términos de los polinomios generales por las funciones de forma lagrangianos y serenpidinos.

Por último, es posible obtener elementos conformes C^K simples, es decir, con un número de incógnitas básicas por nudo igual al de parámetros esenciales. Esto se consigue mediante la consideración de otros tipos de funciones de forma distintas de las polinómicas (funciones racionales), o bien por subdivisión del elemento en trozos, en los que se define una función polinómica específica. Las ventajas comparativas de estos elementos simples en relación con los hiperelementos son evidentes, ya que no imponen condiciones de continuidad en exceso a la solución. La contrapartida esta representada por la complejidad computacional que supone en estos casos la obtención de las funciones de forma.

En los siguientes apartados se describen dos tipos de familias de elementos de clase C^K . Uno de ellos corresponde a una extensión natural del hiperelemento quíntico existente para la clase C^1 (15). El otro tipo de familia utiliza las ideas desarrolladas por Clough y Tochter (5) en un elemento triangular simple y conforme de clase C^1 cuyos resultados reportados en la literatura técnica han probado ser satisfactorios.

5. HIPERELEMENTOS

5.1 DEFINICIONES

Un elemento C^K exige que los parámetros básicos en sus vértices sean todas las derivadas de la función de campo, w , en dos direcciones (x,y) hasta el orden K , es decir:

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^K w}{\partial x^K}, \frac{\partial^K w}{\partial x^{K-1} \partial y}, \dots, \frac{\partial^K w}{\partial y^K}$$

Existen por lo tanto, en el vértice de un elemento C^K , un número de parámetros igual a:

$$S(K) = \binom{K+2}{2} = \frac{(K+2)(K+1)}{2} \quad [5.1]$$

A lo largo de un lado existen parámetros del tipo C^0 que son los valores de la función de campo (w), otros de tipo C^1 correspondientes a la derivada de esta función w respecto a la normal (n) al lado. En general, parámetros de tipo C^K a lo largo de un lado, son del tipo $\partial^K w / \partial n^K$.

Los parámetros a lo largo de un lado pueden estar situados en nudos distintos, o bien lo que parece mas cómodo computacionalmente, concentrados en un solo nudo (el punto medio de lado) en forma de sucesivas derivadas longitudinales o en la dirección del lado (s), es decir, parámetros de tipo C^K son:

$$\frac{\partial^K w}{\partial n^K}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^K w}{\partial n^K} \right), \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^K w}{\partial n^K} \right), \dots$$

Un hiperelemento C^K corresponde a un elemento cuyos requerimientos de continuidad en un conjunto discreto de nudos es superior a K. En particular, en los vertices, los parámetros existentes son del orden C^{K+H} , y $H > 0$ designa la extra clase del hiperelemento C^K .

5.2 HIPERELEMENTOS C^K DE EXTRA CLASE MINIMA ($H=1$)

La familia de este tipo de elementos que se puede construir se indica en la figura 7.

En los vertices existen $S(K+1)$ parámetros, con:

$$S(K+1) = \frac{(K+3)(K+2)}{2}$$

que explícitamente son:

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{K+1} w}{\partial x^{K+1}}, \frac{\partial^{K+1} w}{\partial x^K \partial y}, \dots, \frac{\partial^{K+1} w}{\partial y^{K+1}}$$

En los puntos medios de los lados aparecen grados de libertad o parámetros de diferente tipo, es decir:

$$m_0 \text{ parámetros de tipo } C^0, \text{ que son: } w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dots, \frac{\partial^{m_0-1} w}{\partial s^{m_0-1}}$$

$$m_1 \text{ parámetros de tipo } C^1, \text{ que son: } \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right), \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right), \dots, \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial s^{m_1-1}} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

$$m_K \text{ parámetros de tipo } C^K, \text{ que son: } \frac{\partial^K w}{\partial n^K}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^K w}{\partial n^K} \right), \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^K w}{\partial n^K} \right), \dots, \frac{\partial^{m_K-1}}{\partial s^{m_K-1}} \left(\frac{\partial^K w}{\partial n^K} \right)$$

Si se considera un polinomio completo de grado N para la expresión de la función de campo w, se precisan S(N) coeficientes para su especificación, con:

$$S(N) = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

Evidentemente este número de coeficientes debe al menos igualar al de parámetros disponibles, es decir, se debe cumplir la condición (el factor 3 aparece al considerar el elemento triángulo):

$$S(N) \geq \{S(K+1) + m_0 + m_1 + \dots + m_K\}3$$

y

$$L = S(N) - 3\{S(K+1) + \sum_{i=1}^K m_i\} \geq 0$$

La diferencia (positiva) L entre los coeficientes y los grados de libertad mínimos para la continuidad, indica el número extra de grados de libertad (gdl) disponibles para incrementar la continuidad a lo largo del lado ó introducirlos como gdl interiores. Se sabe que esta última posibilidad no es adecuada numéricamente, ya que implica una cierta dependencia entre los coeficientes del polinomio completo de grado N. Por ello, se procede a disponer los gdl extra, en los puntos medios de los lados. En este caso se podría considerar una de las dos posibilidades siguientes:

POSIBILIDAD 1.- Introducir un parámetro únicamente de cada tipo superior a C^K , es decir:

$$m_{K+1} = 1; \quad m_{K+1} = 1, \dots, m_{K+L} = 1$$

Los parámetros que se introducirían, entonces, serían:

$$\frac{\partial^{K+1}}{\partial n^{K+1}}, \frac{\partial^{K+2}}{\partial n^{K+2}}, \dots, \frac{\partial^{K+L}}{\partial n^{K+L}}$$

POSIBILIDAD 2.- Introducir parámetros únicamente en la continuidad inmediatamente superior (hasta agotarla, que se pasaría a la siguiente), es decir, $m_{K+1} = L$ parámetros (supuesto que este valor no alcanza el máximo H_1 de continuidad C^{K+1} a lo largo del lado) es decir, los parámetros que se considerarán son:

$$\frac{\partial^{K+1} w}{\partial n^{K+1}}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^{K+1} w}{\partial n^{K+1}} \right), \dots, \frac{\partial^{L-1}}{\partial s^{L-1}} \left(\frac{\partial^{K+1} w}{\partial n^{K+1}} \right)$$

Si $L > H_1$, entonces, con $L_1 = L - H_1$, se obtiene:

$$\frac{\partial^{K+1} w}{\partial n^{K+1}}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^{K+1} w}{\partial n^{K+1}} \right), \dots, \frac{\partial^{H_1-1}}{\partial s^{H_1-1}} \left(\frac{\partial^{K+1} w}{\partial n^{K+1}} \right)$$

$$\frac{\partial^{K+2} w}{\partial n^{K+2}}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^{K+2} w}{\partial n^{K+2}} \right), \dots, \frac{\partial^{L_1-1}}{\partial s^{L_1-1}} \left(\frac{\partial^{K+2} w}{\partial n^{K+2}} \right)$$

Si el valor de L_1 fuera superior a H_2 , preciso para alcanzar la continuidad C^{K+2} a lo largo del lado, se procedería de modo semejante.

Existen entre las dos posibilidades anteriores, otras que se pueden considerar situaciones mixtas, por ejemplo, relacionar un número de gdl según la primera posibilidad y el resto de gdl según la segunda.

Aquí solo se va adoptar la primera posibilidad por suponer que no perturba a la familia con ningún incremento de continuidad (C^{K+1}).

Por último, conviene observar que si se desea conservar la simetría del elemento, es decir, no exista un lado más privilegiado (mayor número de gdl) que otro, la diferencia L debe ser múltiplo de 3. Si este no es el caso, el resto (n_0) debe de asignarse como gdl interiores situados en el centro de gravedad del triángulo.

En resumen, la fórmula de la familia de hiperelementos C^K que se diseña corresponde para cada polinomio completo N , a la siguiente expresión:

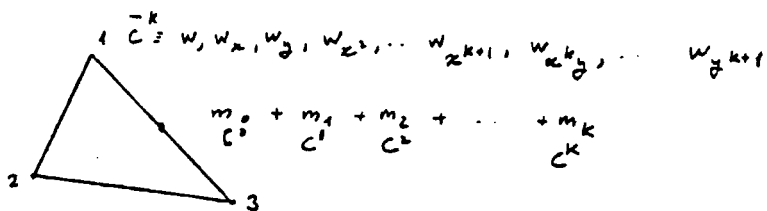
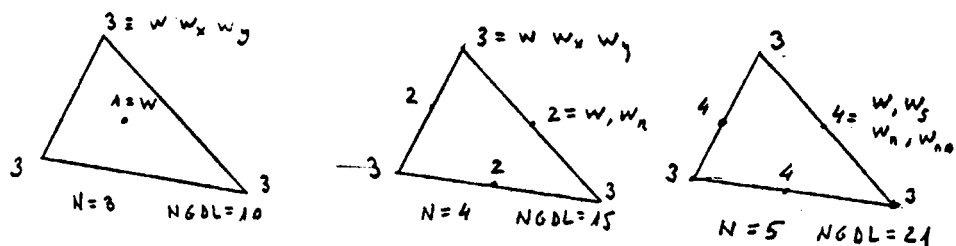
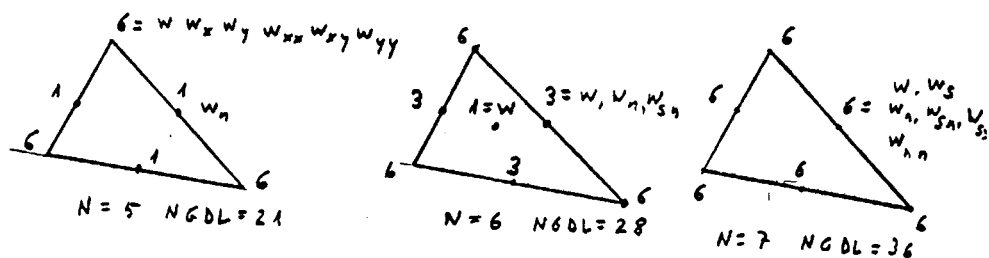


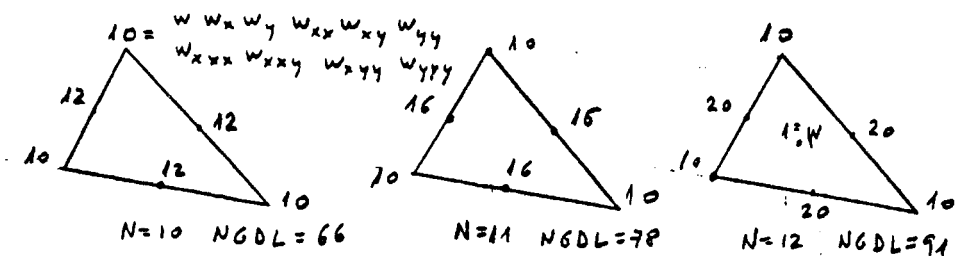
FIGURA 7.- Hiper elemento C^K de extraclassa $H=1$.



(a) Elementos C^0 .



(b) Elementos C^1 .



(c) Elementos C^2 .

FIGURA 8.- Hiper elementos C^K de extraclassa $H=1$.

$$S(N) = 3\{S(K+1) + \sum_{i=0}^K m_i + \sum_{i=K+1}^M m_i\} + n_0 \quad [5.2]$$

siendo

$$\begin{aligned} m_i &= 1 & \text{para} & & i = K+1, K+2 = \dots M \\ n_0 &= 0, 1, 2 & & & (\text{según los casos}) \\ L &= 3(M-K) + n_0 \end{aligned}$$

Los valores de m_i para $i \leq K$ se deducen de las condiciones de continuidad de w , $\partial w / \partial n$, $\partial^2 w / \partial n^2, \dots, \partial^K w / \partial n^K$ a lo largo del lado, con lo que resultan las igualdades:

$$\begin{aligned} \text{Continuidad } (w) : 2(K+2) + m_0 &= N+1 \\ \text{Continuidad } \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) : 2(K+1) + m_1 &= N \\ \text{Continuidad } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right) : 2K + m_2 &= N-1 \\ \text{Continuidad } \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i}\right) : 2(K+2-i) + m_i &= N+1-i \\ \text{Continuidad } \left(\frac{\partial^K w}{\partial n^K}\right) : 2 + m_K &= N+1-K \end{aligned} \quad [5.3]$$

Se obtienen los valores siguientes:

$$\begin{aligned} m_0 &= N - 2K - 3 \\ m_1 &= (N - 2K - 3) + 1 \\ &\vdots \\ m_i &= (N - 2K - 3) + 1 \\ &\vdots \\ m_K &= (N - 2K - 3) + K \end{aligned} \quad [5.4]$$

El valor de L , es por lo tanto, según [5.2]:

$$L = \frac{(N+2)(N+1)}{2} + 3(K+2)K - 3(K+1)N \quad [5.5]$$

o bien

$$M-K = E\left\{\frac{(N+2)(N+1)}{6}\right\} + (K+2)K - (K+1)N \quad [5.6]$$

con $E\{ \}$ función parte entera.

K = 0

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
3	0											1
4	1	1										0
5	2	1	1									0
6	3	1	1	1								1
7	4	1	1	1	1	1						0
8	5	1	1	1	1	1	1	1				0
9	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1

K = 1

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
5	0	1										0
6	1	2										1
7	2	3	1									0
8	3	4	1	1								0
9	4	5	1	1	1	1						1
10	5	6	1	1	1	1	1	1				0
11	6	7	1	1	1	1	1	1	1			0
12	7	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

K = 2

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
10	3	4	5									0
11	4	5	6	1								0
12	5	6	7	1	1							1
13	6	7	8	1	1	1	1					0
14	7	8	9	1	1	1	1	1	1			0
15	8	9	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1

K = 3

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
15	6	7	8	9								1
16	7	8	9	10	1	1						0
17	8	9	10	11	1	1	1	1				0
18	9	10	11	12	1	1	1	1	1	1		1

En la figura 8, se muestran algunos miembros de esta familia.

TABLA 1.- Hiper-elementos C^K de extra clase 1 ($H=1$).

La utilización de estas fórmulas conducen a los resultados de la tabla 1. Conviene tener en cuenta que el valor mínimo del polinomio viene dado por las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} m_0 &\geq 0 \\ L &\geq 0 \end{aligned} \quad [5.7]$$

es decir:

$$\begin{aligned} N_{\min} &\geq 2K+3 \\ N_{\min} &\geq \frac{3+6K+\sqrt{1-12K+12K^2}}{2} \end{aligned} \quad [5.8]$$

5.3 HIPERELEMENTOS C^K DE EXTRA CLASE H

Procediendo de un modo análogo al Apartado [5.2] anterior se deduce:

$$\text{Parámetros en los vértices: } S(K+H) = \frac{(K+H+2)(K+H+1)}{2}$$

que contienen todas las derivadas de la función de campo w hasta $K+H$, inclusive.

Los parámetros en los lados se sitúan en los puntos medios y se clasifican como antes, en tipos $C^0, C^1, C^2, \dots, C^K$, de los cuales existen $m_0, m_1, m_2, \dots, m_K$.

El polinomio completo de grado N precisa para su determinación $S(N)$ coeficientes.

Se adopta la posibilidad 1, introduciendo el número de parámetros adicionales por triadas en los puntos medios de los lados y únicamente de cada tipo superior a C^K , es decir, $m_I = 1$, para $I > K$. Se obtiene así:

$$S(N) = 3\{S(K+H) + \sum_{i=0}^K m_i + \sum_{i=K+1}^M m_i\} + n_0 \quad [5.9]$$

con $0 \leq n_0 \leq 3$ gdl en el cdg del triángulo.

Las condiciones de continuidad C^K a lo largo de un lado del elemento conducen a las siguientes ecuaciones:

K = 0

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
5	0	1										0
6	1	1	1									1
7	2	1	1	1	1							0
8	2	1	1	1	1	1	1					0
9	3	1	1	1	1	1	1	1	1			1

K = 1

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
7	0	1	1									0
8	1	2	1	1								0
9	2	3	1	1	1							1
10	3	4	1	1	1	1	1					0
11	4	5	1	1	1	1	1	1	1			0
12	5	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

K = 2

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
9	0	1	2									1
10	1	2	3	1								0
11	2	3	4	1	1							0
12	3	4	5	1	1	1						1
13	4	5	6	1	1	1	1	1				0
14	5	6	7	1	1	1	1	1	1	1		0

K = 3

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
13	2	3	4	5								0
14	3	4	5	6	1							0
15	4	5	6	7	1	1						1
16	5	6	7	8	1	1	1	1				0
17	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1		0

TABLA 2.- Hiper elementos C^K de extra clase 2 (H=2).

K = 0

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
1	0											0
2	1											0
3	2											1
4	3	1										0
5	4	1	1									0
6	5	1	1	1								1
7	6	1	1	1	1	1						0
8	7	1	1	1	1	1	1	1				0
9	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1

K = 1

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
7	4	5										0
8	5	6	1									0
9	6	7	1	1								1
10	7	8	1	1	1	1						0
11	8	9	1	1	1	1	1	1				0
12	9	10	1	1	1	1	1	1	1	1		1

K = 2

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
12	7	8	9									1
13	8	9	10	1	1							0
14	9	10	11	1	1	1	1					0
15	10	11	12	1	1	1	1	1	1			1

K = 3

N	m ₀	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	m ₈	m ₉	m ₁₀	n ₀
17	10	11	12	13	1							0
18	11	12	13	14	1	1	1					1
19	12	13	14	15	1	1	1	1	1	1		0

TABLA 3.- Elementos simples C^K (H=0).

K = 1

[illegible]

K = 2

N	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	n_0
14	11	12	13	1								0
15	12	13	14	1	1	1						1
16	13	14	15	1	1	1	1	1	1			0

K = 3

N	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	n_0
19	13	14	15	16	1	1						0
20	14	15	16	17	1	1	1	1	1			0

TABLA 4.- Hipoelementos C^K ($H = -1$).

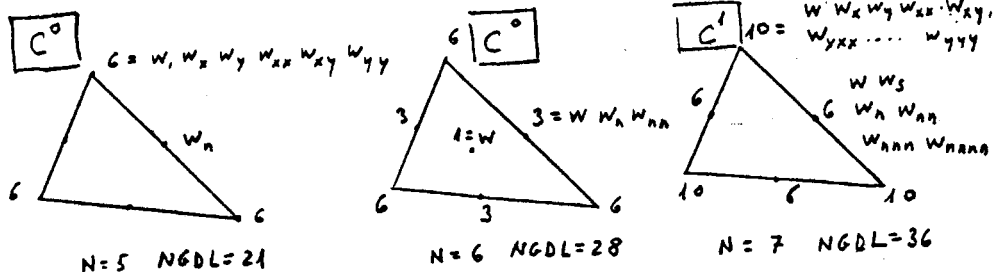


FIGURA 9.- Hiper elementos C^K de extra clase $H=2$.

$$\begin{aligned}
\text{Continuidad } (w) & : 2(K+H+1) + m_0 = N+1 \\
\text{Continuidad } \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) & : 2(K+H) + m_1 = N \\
\text{Continuidad } \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i}\right) & : 2(K+H+1-i) + m_i = N+1-i \\
\text{Continuidad } \left(\frac{\partial^K w}{\partial n^K}\right) & : 2(H+1) + m_K = N+1-K
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Resultan los valores siguientes:

$$\begin{aligned}
m_0 &= N - 2K - 2H - 1 \\
m_1 &= (N - 2K - 2H - 1) + 1 \\
&\vdots \\
m_i &= (N - 2K - 2H - 1) + i \\
&\vdots \\
m_K &= (N - 2K - 2H - 1) + K
\end{aligned} \tag{5.11}$$

y por lo tanto:

$$M-K = E\left\{\frac{(N+2)(N+1)}{2}\right\} - \frac{1}{2}\{(K+H+2)(K+H+1) + (K+1)(2N-3K-4H-2)\}$$

y n_0 es el resto de la parte entera E, es decir:

$$(N+2)(N+1) = 3(M-K) + n_0$$

Las condiciones de grado mínimo para el polinomio son:

$$\begin{aligned}
m_0 &\geq 0 \\
M-K &\geq 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Resultados de esta familia ($H=2$) se representan en la tabla 2 y figura 9.

Casos particulares de hiper elementos corresponden a la situación $H=0$, que representan unos elementos simples y $H<0$, que constituyen los hipo elementos descritos por Morley.

Para $H=0$, se muestra la tabla 3 y la familia de hipo elementos se representa en la tabla 4.

Es importante resaltar que en los casos $H \neq 0$ (elementos simples e hipoelementos) no es posible obtener funciones de forma conformes C^K ($K > 0$) mediante expresiones polinómicas únicas dentro del elemento. En efecto, en la demostración que se ha llevado a cabo para deducir el número de parámetros y el grado polinómico preciso para alcanzar la compatibilidad requerida se admitía independencia lineal entre los distintos parámetros o gdl del elemento. Sin embargo, se puede mostrar que existen relaciones lineales entre estos parámetros en los casos de extraclase no positiva. Para ello se utiliza una generalización de la demostración dada por Irons y Drapper, considerando un vértice en el que coincidan dos lados de direcciones s_1 y s_2 . Si se trata de un elemento C^K , a lo largo de cada lado i ($i = 1, 2$) las diferentes funciones:

$$w, \frac{\partial w}{\partial s_j}, \frac{\partial^2 w}{\partial s_j^2}, \dots, \frac{\partial^K w}{\partial s_j^K}$$

con j el otro lado (distinto de i) son polinomios continuos, cuyos coeficientes dependen únicamente de los parámetros situados a lo largo del lado s_i . Por lo tanto los K valores de las derivadas de las funciones anteriores respecto a s_i que se relacionan a continuación se pueden expresar únicamente en términos de los parámetros situados en el lado considerado:

$$\frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_i^K \partial s_j}, \frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_i^{K-1} \partial s_j^2}, \dots, \frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_i \partial s_j^K}$$

Análogamente se puede proceder con respecto al lado s_j obteniéndose las siguientes derivadas, función exclusiva de los parámetros situados en el lado j :

$$\frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_j^K \partial s_i}, \frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_j^{K-1} \partial s_i^2}, \dots, \frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_j \partial s_i^K}$$

Si se considera la validez del teorema de Schwartz, se cumple:

$$\frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_i^m \partial s_j^{K+1-m}} = \frac{\partial^{K+1} w}{\partial s_j^{K+1-m} \partial s_i^m}$$

y por lo tanto, existen K relaciones entre los parámetros de los dos lados s_i y s_j . En un elemento triangular de continuidad C^K y extraclase ne

gativa hay $2K$ relaciones entre los distintos gdl situados a lo largo de sus tres lados. Como consecuencia no es posible obtener elementos simples ó hipoelementos conformes de continuidad C^K ($K > 0$), con una expresión polinómica única en su interior.

6. ELEMENTOS SIMPLES CON FUNCIONES POLINOMICAS A TROZOS EN SU INTERIOR

Se adopta por comodidad de cálculo, el centro de gravedad, o del triángulo como punto común de los tres triángulos (subelementos) que dividen el triángulo total 123, según se muestra en la figura 10a. En cada subelemento triangular se supone existe una función polinómica única de grado N que describe el valor de la función w .

Como se está estudiando un elemento simple de continuidad C^K , por lo tanto, en los vértices del triángulo 123, deben existir dicha continuidad, que se designa por C^K y existen $S(K)$ gdl, siendo:

$$S(K) = \frac{(K+1)(K+2)}{2} \quad [6.1]$$

A lo largo de los lados, como en el caso de hiperelementos, se concentran todos los gdl en el punto medio de cada lado, es decir, los $m_0, m_1, m_i, \dots, m_K$ gdl correspondientes a la continuidad C_0, C_1, \dots, C_K en dicho punto.

Considerando cada subelemento (figura 10b) los gdl en el lado y vértices exteriores están ya determinados, por lo que los restantes gdl procedentes de la diferencia entre el número total de parámetros (coeficientes) del polinomio completo de grado N y los gdl existentes a lo largo del lado exterior incluidos los vértices, es decir, el número L de gdl en el vértice 0 del subelemento es:

$$L = S(N) - \left\{ \sum_{i=0}^K m_i + 2 S(K) \right\} \quad [6.2]$$

Desarrollando la expresión anterior, y considerando los valores de m_i deducidos mediante las ecuaciones [5.11] con $H=0$, se obtiene:

$$L = \frac{(N+1)(N+2)}{2} - \sum_{i=0}^K \{ (N-2K-1)+i \} - (K+1)(K+2)$$

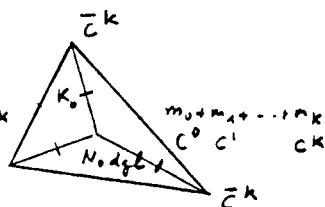
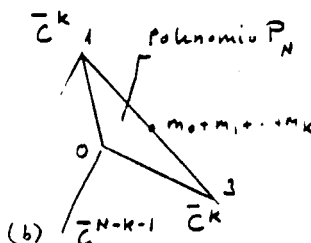
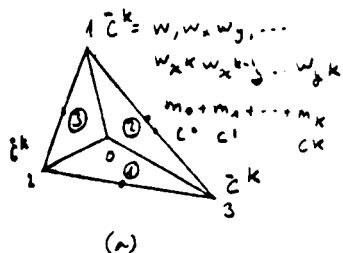


FIGURA 10.-Elemento triangular simple C^K con funciones polinómicas a trozos en un su interior.

FIGURA 11.-Valores que definen el elemento simple C^K y con polinomio N .

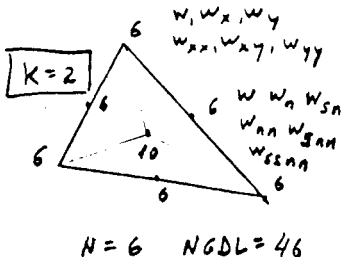
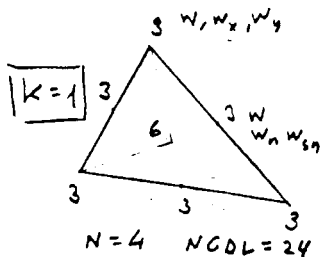
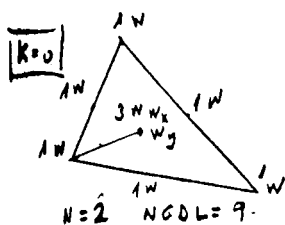
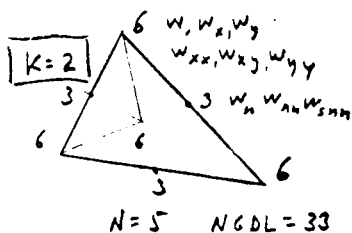
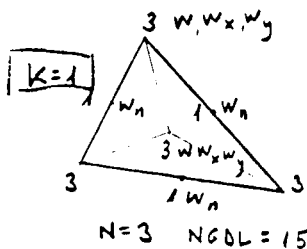
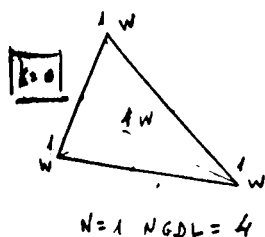


FIGURA 12.- Familias de elementos C^K simples con funciones polinómicas a trozos.

es decir:

$$L = \frac{(N-K+1)(N-K)}{2} \quad [6.3]$$

La expresión [6.3] indica que los gdl, que se concentran en el vértice interior 0, del subelemento, corresponden a una continuidad C^{N-K-1} .

Se pueden eliminar todos o la mayor parte de estos gdl en el nudo interior, si se consideran requerimientos de continuidad interior con el triángulo total, en particular, continuidad a lo largo de los lados interiores 01, 02 y 03. Con este fin se introducen las siguientes condiciones a lo largo de cada uno de estos lados.

Continuidad C^0 :

Existen $N+1$ coeficientes del polinomio de grado N y $(K+1) + (N-K-1+1) = N+1$ gdl en los vértices, por lo que se pueden imponer el número n_0 siguiente de condiciones adicionales entre los gdl:

$$n_0 = (N+1) - (N-1) = 0$$

Continuidad C^i :

Existen $N+1-i$ coeficientes del polinomio $(\partial^i w / \partial n^i)$ derivada normal a lo largo del lado y $(K+1-i) + (N-K-1+1-i) = N+1-2i$ gdl concentrados en los vértices. Para la continuidad C^i se precisan imponer los siguientes n_i condiciones entre los gdl:

$$n_i = (N+1-i) - (N+1-2i) = i$$

Por consiguiente se puede incrementar la continuidad interior del elemento total, imponiendo relaciones entre los distintos gdl del triángulo total. Estas relaciones pueden plantearse mediante la pertinente identificación de los valores de la función w , y de sus derivadas $\partial^i w / \partial n^i$ ($i=1, 2, \dots, K_0$, con K_0 máxima continuidad interna exigida) en los puntos comunes 1', 2' y 3' a cada pareja de subelementos. Se supone por comodidad de cálculo que estos nudos 1', 2' y 3' son respectivamente los puntos medios de los lados 01, 02 y 03 respectivamente.

En el caso de que el número n_i de condiciones de continuidad C^i a imponer sea mayor que la unidad, se identificarían los valores de las siguientes derivadas de la función (obtenida según las expresiones polinómicas de cada subelemento común) en los puntos 1', 2' y 3' citadas:

$$\frac{\partial^i w}{\partial n^i}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right), \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right), \dots, \frac{\partial^{n_i-1}}{\partial s^{n_i-1}} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right)$$

Por consiguiente entre el número total de parámetros (coeficientes de las tres expresiones polinómicas completas de que se dispone, es posible introducir una serie de condiciones de continuidad interna, de modo que se pueda eliminar el máximo número de gdl interiores (en el nudo 0). Se deduce de esta forma, para cada uno de los nudos i , punto medio del lado O_i de los subelementos $A_1 = O_{ij}$ y $A_2 = O_{ki}$, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Continuidad } C^0: \quad (w)_{A_1} &= (w)_{A_2} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_{A_1} &= - \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_{A_2} \\ \left(\frac{\partial^{n_0-1} w}{\partial s^{n_0-1}} \right)_{A_1} &= (-)^{n_0-1} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_{A_2} \end{aligned} \quad [6.4]$$

Continuidad C^i ($i = 1, 2, \dots, K_0$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right)_{A_1} &= (-)^i \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right)_{A_2} \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right)_{A_1} &= (-)^{i+1} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right)_{A_2} \\ \frac{\partial^{n_i-1}}{\partial s^{n_i-1}} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right)_{A_1} &= (-)^{i+n_i-1} \frac{\partial^{n_i-1}}{\partial s^{n_i-1}} \left(\frac{\partial^i w}{\partial n^i} \right)_{A_2} \end{aligned}$$

El número máximo de ecuaciones [6.4] que se pueden plantear debe satisfacer la desigualdad siguiente:

$$3(n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_{K_0}) \leq L \quad [6.5]$$

con el valor de L dado por la expresión (6.3).

La inecuación [6.5] permite obtener el orden K_0 de la continuidad interior que es posible requerir. En efecto, se puede escribir:

$$\frac{3K_0(K_0+1)}{2} \leq \frac{(N-K+1)(N-K)}{2} = L$$

o bien:

$$S(K_0-1) \leq \frac{1}{3}S(N-K-1) \quad [6.6]$$

K_0 es el máximo valor entero que satisface la inecuación [6.6]

La diferencia D definida como sigue:

$$D = L - 3 \sum_{i=0}^{K_0} n_0 \quad [6.7]$$

representa el número de gdl en el nudo interior 0, que permanecen sin eliminar. Sin embargo, se pueden incluir en el nudo i' de cada lab interior, parte de los n_{K_0+1} condiciones de continuidad K_0+1 . Sea este número de condiciones n'_{K_0+1} con $n'_{K_0+1} \leq n_{K_0+1}$. Las condiciones que se imponen son las correspondientes a la igualdad, en cada triángulo A_1 y A_2 , de los valores:

$$\frac{\partial^{K_0+1} w}{\partial n^{K_0+1}}, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^{K_0+1} w}{\partial n^{K_0+1}} \right), \dots, \frac{\partial^{n'_{K_0+1}}}{\partial s^{n'_{K_0+1}}} \left(\frac{\partial^{K_0+1} w}{\partial n^{K_0+1}} \right) \quad [6.8]$$

El valor de n'_{K_0+1} se obtiene mediante la expresión:

$$n'_{K_0+1} = E\left(\frac{D}{3}\right) \quad [6.9]$$

con $E(x)$ la función parte entera de x , y los N_0 gdl que permanecen en el nudo 0 del elemento final, una vez llevada a cabo la eliminación que se deduce de las ecuaciones (6.5) y (6.8) son por consiguiente:

$$N_0 = D - 3 \cdot E\left(\frac{D}{3}\right) \quad [6.10]$$

TABLA 5.- Elementos simples de clase C^K con funciones a trozos en su interior grado de los polinomios N.

K = 0

N	m_0	L	C_0	N_0	Observaciones
1	0	1	0	0	CT($N_0=0$) LT($N_0=0$) QT($N_0=1$)
2	1	3	1	0	
3	2	6	2	1	
4	3	10	3	3	
5	4	15	4	6	
6	5	21	5	10	
7	6	28	6	15	

K = 1

N	m_0	m_1	L	C_0	N_0	Observaciones
3	0	1	3	1	0	Elemento de Clough
4	1	2	6	2	3	
5	2	3	10	3	7	
6	3	4	15	4	12	
7	4	5	21	5	18	

K = 2

N	m_0	m_1	m_2	L	C_0	N_0
5	0	1	2	6	2	3
6	1	2	3	10	3	7
7	2	3	4	15	4	12
8	3	4	5	21	5	18

Notas: L = número de gdl en el nudo interior.

C_0 = indica el orden de continuidad en el nudo interior.

N_0 = número de gdl en el interior tras el proceso de reducción.

Se puede en el ensamblaje eliminar estos gdl mediante condensación estática.

Se comprende que en general N_0 es un número comprendido entre 0 y 2, es decir:

$$0 \leq N_0 < 3$$

Si $N_0 = 1$ el gdl que permanece en 0, corresponde a la función w .

Si $N_0 = 2$ los gdl que no se eliminan en 0, son las derivadas de la función w , es decir: $\partial w / \partial x$ y $\partial w / \partial y$.

El planteamiento anterior no es válido si se introducen condiciones de continuidad mayor que C^1 , pues puede mostrarse siguiendo un razonamiento análogo al desarrollado en el apartado 5.2 que aparecen relaciones lineales entre los parámetros. Por ello, se representa una familia de elementos en los que se ha eliminado tres gdl interiores mediante esta técnica de continuidad interior. Los restantes pueden ser suprimidos en el proceso de ensamblaje es decir, por condensación estática. El elemento general de la familia se representa en la figura 11. La particularización de las fórmulas obtenidas, se resume en la tabla 5, que contiene los primeros elementos de la familia jerárquica que se acaba de describir.

7. ELEMENTOS DE TRANSICION

7.1 INTRODUCCION

Puede interesarse en un análisis mediante E.F. disponer, en las zonas de variación brusca de resultados con características geométricas especiales, elementos de dimensiones pequeñas y por lo tanto con desarrollos polinómicos de orden bajo. En zonas más uniformes se pueden adoptar elementos de grandes dimensiones y que recojan en su desarrollo polinomios de orden elevado. Se hace necesario, disponer para un tipo de problema de clase C^K , elementos de transición que permitan, unir distintos elementos dentro de una misma familia. La técnica que se utilizará consiste en degenerar, en el elemento de orden más elevado, el grado del polinomio a lo largo del lado común de modo que coincida con el grado del polinomio del elemento de menor orden. Para ello es preciso introducir una generalización de las fórmulas de interpolación de Lagrange, que se describe a continuación.

7.2 INTERPOLACION GENERALIZADA DE LAGRANGE

Se denomina $P_{ij}(x)$ a un polinomio de grado N , siendo $N = \sum_{k=1}^K n_k$, que pasa por K puntos, tales que en el k -simo, de abscisa x_k se anulan las n_k primeras derivadas ($k=1,2,\dots,K, k \neq i$) y en el punto i , de abscisa x_i , la derivada j (*) es igual a la unidad y las (n_i-1) restantes primeras derivadas se anulan asimismo en x_i .

Formalmente la función $P_{ij}(x)$ se define como sigue:

$$\left. \frac{d^\lambda P_{ij}}{dx^\lambda} \right|_{x=x_k} = 0 ; \quad k \neq i, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, n_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\left. \frac{d^\lambda P_{ij}}{dx^\lambda} \right|_{x=x_i} = 0 ; \quad \lambda \neq j, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, n_i$$

$$\left. \frac{d^j P_{ij}}{dx^j} \right|_{x=x_i} = 1$$

Para obtener $P_{ij}(x)$ se define el polinomio:

$$p_i(x) = \frac{(x-x_1)^{n_1+1} (x-x_2)^{n_2+1} \dots (x-x_K)^{n_K+1}}{(x-x_i)^{n_i+1}} \quad [7.1]$$

que adopta los valores numéricos siguientes:

$$\left. \frac{d^\lambda p_i(x)}{dx^\lambda} \right|_{x=x_i} = \pi_{i\lambda} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, n_i)$$

Se obtiene entonces:

$$P_{ij}(x) = p_i(x) \sum_{n=0}^{n_i} g_n^{ij} \frac{(x-x_i)^n}{n!} \quad [7.2]$$

NOTA(*): j depende en general del punto i que se considere.

siendo

$$g_n^{ij} = 0 \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots, j-1 \quad [7.3.a]$$

$$g_j^{ij} = \pi_{i0}^{-1} \quad [7.3.b]$$

y los restantes valores de g_n^{ij} se pueden obtener de la siguiente fórmula recurrente:

$$g_n^{ij} = -\pi_{i0}^{-1} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \binom{n}{\lambda} \pi_{i\lambda} g_{n-\lambda}^{ij} \quad [7.3.c]$$

con $n = j+1, j+2, \dots, n_i$

La expresión [7.3.c], se puede escribir:

$$g_n^{ij} = -\pi_{i0}^{-1} \sum_{\lambda=1}^{n-j} \binom{n}{\lambda} \pi_{i\lambda} g_{n-\lambda}^{ij} \quad [7.3.d]$$

con $g_{\lambda}^{ij} = g_{\lambda}^{ij}/\lambda!$

7.3 APLICACION 1

Elemento C^N de los dos nudos:

Se consideran coordenadas adimensionales: $\xi_1 = -1$ y $\xi_2 = 1$.

Las funciones polinómicas $p_i(\xi)$ son en este caso:

$$p_1(\xi) = (\xi-1)^{N+1}; \quad p_2(\xi) = (\xi+1)^{N+1}$$

y los valores de sus sucesivas derivadas:

$$\pi_{1\lambda} = (-2)^{N+1-\lambda} \frac{(N+1)!}{(N+1-\lambda)!}; \quad \pi_{2\lambda} = 2^{N+1-\lambda} \frac{(N+1)!}{(N+1-\lambda)!}$$

Introduciendo estos valores en la expresión [7.3.d] se deduce:

$$g_n^{ij} = - \sum_{\lambda=1}^{n-j} (-2)^{-\lambda} \binom{N+1}{\lambda} g_{n-\lambda}^{ij}; \quad g_n^{2j} = - \sum_{\lambda=1}^{n-j} 2^{-\lambda} \binom{N+1}{\lambda} g_{n-\lambda}^{ij}$$

Estas ecuaciones de recurrencia tienen como solución:

$$g_{k+j}^{-1j} = (-)^K \binom{N+k}{k} \frac{1}{(-2)^{N+k+1}} \frac{1}{j!} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

$$g_{k+j}^{-2j} = (-)^k \binom{N+k}{k} \frac{1}{2^{N+k+1}} \frac{1}{j!}$$

Las funciones de forma son, en este caso:

$$N_{1j}^N(\xi) = \frac{1}{j!} \left(\frac{\xi-1}{2}\right)^{N+1} (\xi+1)^j \sum_{k=0}^{N-j} \binom{N+k}{k} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^k$$

$$N_{2j}^N(\xi) = \frac{1}{j!} \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{N+1} (\xi-1)^j \sum_{k=0}^{N-j} \binom{N+k}{k} \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^k$$

$$(j=0,1,2,\dots,N)$$

En la figura 13 se representan los casos para $N=0, 1$ y 2 . Las funciones de forma se relacionan a continuación para la situación $N=3$.

$$N_{10}^3 = \frac{(\xi-1)^4}{64} (5\xi^3 + 25\xi^2 + 43\xi + 27)$$

$$N_{11}^3 = \frac{(\xi-1)^4}{64} (\xi+1) (10\xi^2 + 28\xi + 22)$$

$$N_{12}^3 = \frac{(\xi-1)^4}{64} (\xi+1)^2 (4\xi+6)$$

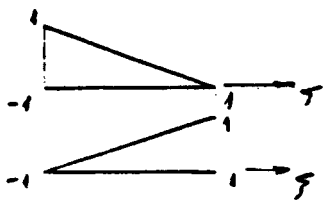
$$N_{13}^3 = \frac{(\xi-1)^4}{16} (\xi+1)^3$$

$$N_{20}^3 = \frac{(\xi+1)^4}{64} (-5\xi^3 + 25\xi^2 - 43\xi + 27)$$

$$N_{21}^3 = \frac{(\xi+1)^4}{64} (\xi-1) (10\xi^2 - 28\xi + 22)$$

$$N_{22}^3 = \frac{(\xi+1)^4}{64} (\xi-1)^2 (-4\xi+6)$$

$$N_{23}^3 = \frac{(\xi+1)^4}{16} (\xi-1)^3$$



$$N_{10}^0 = \frac{1-\xi}{2}$$

$$N_{20}^0 = \frac{1+\xi}{2}$$

Elemento C⁰.



$$N_{10}^1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)$$



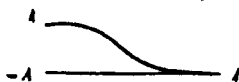
$$N_{11}^1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(\xi+1)$$



$$N_{20}^1 = \frac{1}{4}(\xi+1)^2(2-\xi)$$



$$N_{21}^1 = \frac{1}{4}(\xi+1)^2(\xi-1)$$



Elemento C¹.

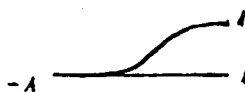
$$N_{10}^1 = \frac{1}{16}(1-\xi)^3(3\xi^2+9\xi+8)$$



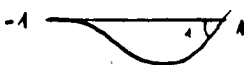
$$N_{11}^2 = -\frac{1}{16}(1-\xi)^3(\xi+1)(3\xi-8)$$



$$N_{12}^2 = \frac{1}{16}(1-\xi)^3(\xi+1)^2$$



$$N_{20}^2 = \frac{1}{16}(\xi+1)^3(3\xi^2-9\xi+8)$$



$$N_{21}^2 = \frac{1}{16}(\xi+1)^3(\xi-1)(-3\xi+8)$$



$$N_{22}^2 = \frac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-1)^2$$

Elemento C².

FIGURA 13.- Elementos 1-D de clase
156

7.4 APLICACION 2

Si se considera el lado de un triángulo de una de las familias anteriores, se observa que todos los grados de libertad están concentrados en los vértices (extremos del lado) y en su punto medio (*). Por otra parte se supone que el número de gdl de cada vértice a p y el de los gdl del punto medio a q. Se adoptan coordenadas adimensionales, es decir, los tres nudos (1, 2 y 3) del lado se definen por $\xi = 1, 0$ y -1 respectivamente.

Aplicando el desarrollo de [4.2] se obtiene:

$$p_1 = (\xi-1)^p \xi^q$$

$$p_2 = (\xi^2-1)^p$$

$$p_3 = (\xi+1)^p \xi^q$$

Por otra parte, los valores numéricos de las sucesivas derivadas de los polinomios anteriores son:

$$\pi_{1k} = (-1)^{p+q-k} k! \sum_{i=i_0}^p \binom{p}{i} \binom{q+i}{k}$$

$$\pi_{2k} = (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k! \quad \text{si} \quad k = 2k'; \quad \pi_{2k} = 0$$

en otro caso

$$\pi_{3k} = k! \sum_{i=i_0}^p \binom{p}{i} \binom{q+i}{k}$$

con $i_0 = \max(0, k-q)$.

NOTA(*): El cálculo que sigue se ha referido a los elementos simples C^K con desarrollos polinómicos a trozos. La extensión a hiperelementos C^K con extraclase H es inmediata. Basta considerar $p = K + H + 1$, en lugar de $p = K + 1$ en la fórmula [7.4] y $p = K + H - j + 1$ en vez de $p = K - j + 1$ en la fórmula [7.6]

Se obtienen de este modo los valores iniciales:

$$\pi_{10} = (-)^{p+1} 2^p; \quad \pi_{20} = 1; \quad \pi_{30} = 2^p$$

Aplicando las fórmulas [7.3.a], [7.3.b] y [7.3.c], se deducen los polinomios $P_{ij}(\xi)$, correspondientes a tres puntos $(-1, 0, 1)$.

Con este cálculo previo es posible obtener las relaciones que deben existir entre los gdl a lo largo de un lado de un elemento (K, N) para hacerlo compatible con otro elemento adyacente de menor orden (K, N') , con $N' < N$. Para ello, se estudia la compatibilidad de las distintas funciones, w ,

$$\frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}, \dots, \frac{\partial^K w}{\partial n^K}$$

a lo largo del lado común y las condiciones que implica cada una de ellas.

(a) Compatibilidad de w .

Los gdl existentes en cada uno de los vértices $i (i=1,3)$ se designan en su proyección sobre el lado como sigue:

$$w_i, w_{is}, w_{is2}, w_{is3}, \dots, w_{isK}$$

Los gdl en el punto medio del lado son ($i=2$)

$$w_2, w_{2s}, w_{2s2}, \dots, w_{2sm_0}$$

Las flechas a lo largo del lado $w=w(\xi)$ puede escribirse como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} w = & w_1^p P_{10} + w_{1s}^p P_{11} + w_{1s2}^p P_{12} + \dots + w_{1sK}^p P_{1K} + w_3^p P_{30} + w_{3s}^p P_{31} + w_{3s2}^p P_{32} + \dots + \\ & + w_{3sK}^p P_{3K} + w_2^p P_{20} + w_{2s}^p P_{21} + w_{2s2}^p P_{22} + \dots + w_{2sm_0}^p P_{2m_0} \end{aligned} \quad [7.4]$$

con P_{ij} las funciones de ξ anteriormente definidas y siendo $p = K+1$ y $q = m_0$.

La expresión [7.4] puede escribirse por comodidad en la forma mas simplificada:

$$w = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^{j_i} w_{isj} P_{ij} \quad [7.5]$$

con $j_i = K$ para $i=1$ y 3 ; $j_2 = m_0$.

El polinomio [7.5] en general, de grado N , debe degenerar en otro de grado N' menor. Para ello se anulan los $N-N'$ coeficientes de las potencias de ξ , mas elevadas, es decir, las correspondientes a $\xi^N, \xi^{N-1}, \dots, \xi^{N'+1}$, que permiten obtener las $N-N'$ relaciones entre los distintos gdl (w_{isj}). Los gdl que deben eliminarse corresponden a los de orden de derivación mas elevado situados en el punto medio del lado, es decir, los siguientes:

$$w_{2s} m_0, w_{2s} m_0 - 1, \dots, w_{2s} m_0 - N' - 1$$

(b) Continuidad de $\frac{\partial^j w}{\partial n^j}$.

Se procede de un modo totalmente análogo al caso anterior de continuidad de w . Ahora los gdl en los vértices $i(i=1,3)$ son:

$$w_i, w_{is}, w_{is2}, \dots, w_{isK-j}$$

con

$$w_i = \left(\frac{\partial^j w}{\partial n^j} \right)_i \quad \text{y} \quad w_{is} = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \left(\frac{\partial^j w}{\partial n^j} \right)_i$$

Los gdl en el punto medio del lado son ($i=3$):

$$w_i, w_{is}, w_{is2}, \dots, w_{ism_j}$$

La función $\frac{\partial^j w}{\partial n^j}$ puede escribirse a lo largo del lado como sigue:

$$\frac{\partial^j w}{\partial n^j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{\lambda=0}^{\lambda_i} w_{is}^{\lambda} P_{i\lambda} \quad [7.6]$$

con $\lambda_1 = K-j$ para $i = 1$ y 3 ; $\lambda_2 = m_j$

con P_{ij} las funciones polinómicas de ξ definidas anteriormente para $p = K-j+1$ y $q = m_j$.

El polinomio [7.6] será en general de grado $N-j$ y las condiciones entre los gdl deben representar la anulación de los $N-N'$ de las potencias de ξ mas elevadas. Los gdl que pueden eliminarse a partir de las $N-N'$ - condiciones corresponden a:

$$w_{2s} m_j, w_{2s} m_j - 1, \dots, w_{2s} m_j - N + N' - 1$$

De esta forma es posible, en un elemento normal del tipo (K, N) y reducirlo a otro de transición (K, N) con un lado sobre el que existe una compatibilidad con (K, N') mediante eliminación del siguiente número de gdl:

$$(K+1)(N-N')$$

Se puede proceder análogamente con cualquiera de los otros lados, obteniéndose así, en general, elementos de transición de (K, N) en (K_1, N_1) , (K_2, N_2) y (K_3, N_3) , como se indica en la figura 14.

La extensión de la formulación anterior a los hiperelementos C^K de extracalse H puede efectuarse como se ha indicado, con el oportuno cambio de la variable K en los vértices, por $K+H$.

8. EXPERIMENTACION NUMERICA

En este apartado se presentan algunos resultados obtenidos con algunos elementos pertenecientes a las dos familias expuestas anteriormente. En particular de la primera familia los hiperelementos HE1 de extracalse $H = 1$ (figura 15) y HE2 de extracalse $H = 2$ (figura 16)^(*). Ambos utilizan polinomios interpolantes de grado $N = 7$, es decir, con 36 parámetros básicos.

NOTA(*): En realidad en estos elementos se han separados los gdl concentrados en el punto medio de los lados, pero numéricamente esta modificación no es significativa.

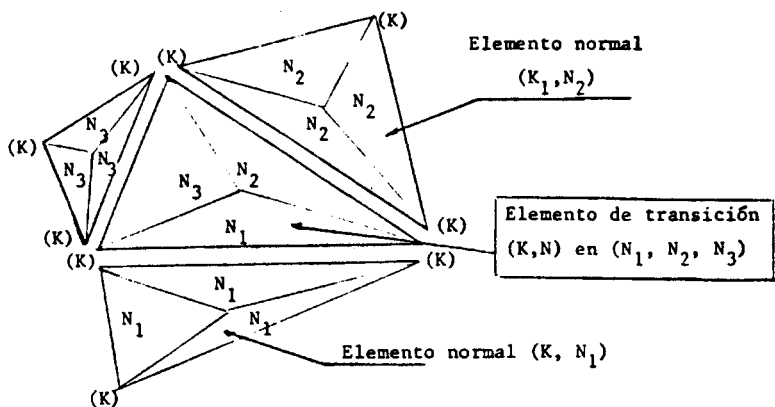


FIGURA 14.- Elementos de transición.

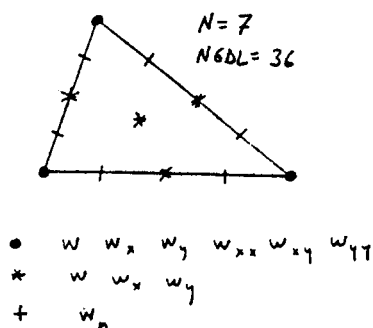


FIGURA 15.- Hiperelemento HE1.

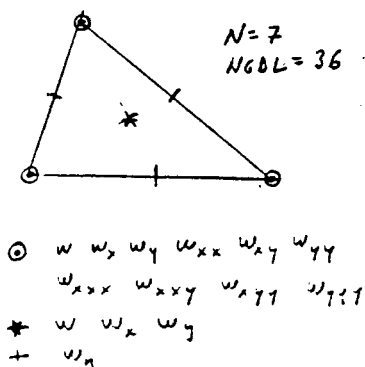


FIGURA 16.- Hiperelemento HE2.

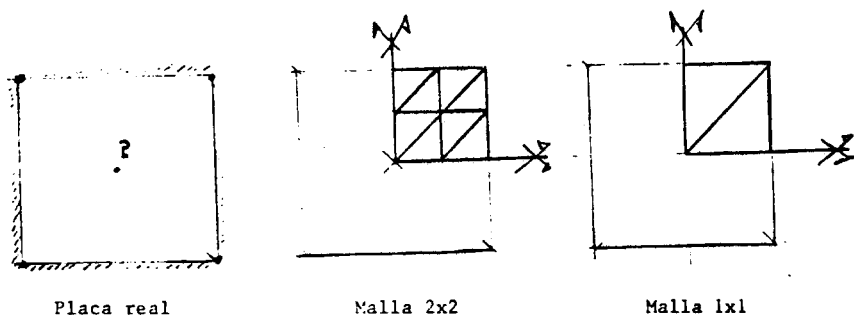


FIGURA 17.- Experimento numérico.

TABLA 6.- Carga puntual P en el centro.

Elemento	Malla	Placa apoyada en su centro					Placa apoyada en sus esquinas			
		NGL1	NGL2	W_0	R_x	Q_x	NGL1	NGL2	W_0	W_l
HE1(N=7)	1x1	45	20	0,01156	0,1217	-0,4666	45	36	0,03920	0,02300
HE1(N=7)	2x2	158	112	0,01159	0,1219	-0,4175	158	138	0,03916	0,02294
HE2(N=7)	2x2	130	80	0,01158	0,1219	-0,3528	130	106	0,03953	0,02350
ES(N=3)	1x1	17	6	0,01042	0,1750	-0,5000	17	13	0,03765	0,02282
ES(N=4)	1x1	27	12	0,01142	0,1179	-0,2323	27	23	0,03891	0,02286
ES(N=5)	1x1	37	18	0,01152	0,1403	-0,5921	37	33	0,03907	0,02291
ES(N=6)	1x1	47	24	0,01156	0,1074	-0,3104	47	43	0,03911	0,02291
ES(N=7)	1x1	57	30	0,01158	0,1352	-0,6312	57	53	0,03912	0,02291
ES(N=3)	2x2	43	24	0,01128	0,1366	-0,3706	-	-	-	-
Referencia		(1)		0,01160	0,1219	-0,4170	363	359*	0,03904	0,02284

LEYENDA:

NGL1 = número de grados de libertad totales. (No se consideran los eliminados mediante condensación estática en ES).

NGL2 = número de grados de libertad activos.

W_0 = flecha en el centro/(Pa²/D).

W_l = flecha en el centro del lado /(Pa²/D).

R_x = reacción de esquina/P.

Q_x = cortante en el centro del lado/(P/a).

HE1 = hiper elemento de extracase N=1.

HE2 = hiper elemento de extracase N=2.

ES = elemento simple (extensión de Clough-Tochter).

N = grado del polinomio interpolante.

(*) = Resultados obtenidos mediante el programa SAP, con una malla de 100 elementos LLCT9 en un cuadrante de la placa.

TABLA 7.- Carga uniforme de intensidad q.

Elemento	Malla	Placa apoyada en su contorno					Placa apoyada en sus esquinas				
		NGL1	NGL2	W_0	H_x	Q_x	NGL1	NGL2	W_0	W_1	H_x
HE1(N=7)	1x1	45	-	0,004062	0,04833	-0,3438	-	-	-	-	-
HE1(N=7)	2x2	158	112	0,004062	0,04790	-0,3406	158	138	0,0255	0,0178	0,114
HE2(N=7)	2x2	130	80	0,004063	0,04850	-0,3100	130	106	0,0258	0,0181	0,115
ES(N=3)	1x1	17	6	0,004155	0,06185	-0,1930	17	13	0,0250	0,0176	0,121
ES(N=4)	1x1	27	12	0,004081	0,06570	-0,2206	27	23	0,0255	0,0177	0,111
ES(N=5)	1x1	37	18	0,004060	0,04647	-0,3120	37	33	0,0255	0,0177	0,111
ES(N=6)	1x1	47	24	0,004063	0,04817	-0,3355	47	43	0,0255	0,0177	0,112
Referencia		(1)		0,004062	0,04790	-0,3380	(18)		0,0249	0,0180	0,109

LEYENDA:

NGL1 = número de grados de libertad totales. (No se consideran los eliminados por condensación estática en ES).

NGL2 = número de grados de libertad activos.

W_0 = flecha en el centro/(qa^4/D).

W_1 = flecha en el centro del lado/(qa^4/D).

H_x = momento flector en el centro /(qa^2).

R_x = reacción de esquina/(qa^2).

Q_x = cortante en el centro del lado/(qa).

HE1 = hiperelemento de extraclase N=1.

HE2 = hiperelemento de extraclase N=2.

ES = elemento simple (extensión de Clough-Tochter).

N = grado del polinomio interpolante.

Las funciones de forma han sido obtenidas explícitamente en (16), en donde se ha llevado a cabo una extensa experimentación numérica, en relación con problemas de flexión de placas. Aquí sólo se presentan algunos de estos resultados. De la segunda familia de elementos finitos, correspondientes a una extensión del elemento de Clough y Tochter se han considerado los cuatro primeros elementos simples (ES) es decir, aquellos cuyos polinomios interpolantes a trozos son de grados $N=3, 4, 5$ y 6 respectivamente. Los resultados alcanzados con los elementos de esta segunda familia, se encuentran en fase de elaboración, de acuerdo con el desarrollo presentado en (17) y deben ser interpretados todavía dentro de un contexto de provisionalidad.

Se ha analizado con estos elementos el clásico problema de prueba consistente en el estudio de la flexión de una placa cuadrada de lado a . La constante de la placa se denomina D y su coeficiente de Poisson se ha su puesto $\nu=0.30$. Los dos tipos de carga considerados han sido: Uniforme en toda la superficie de la placa con intensidad q y una carga concentrada puntual de valor P situada en el centro de la placa. Se han contemplado dos posibilidades de condiciones de borde: Placa simplemente apoyada en todo su contorno y placa apoyada únicamente en sus cuatro esquinas (vértices). La discretización se ha materializado en mallas de 1×1 y 2×2 , equivalentes a modelizar un cuarto de placa con dos y ocho elementos respectivamente (figura 17).

Los resultados obtenidos se resumen en las tablas 6 y 7. En ellas se ha procedido al cálculo exacto de las integrales -analíticamente o con un número suficiente de puntos de integración de Gauss. La concordancia de resultados entre los hiperelementos HE1 y HE2 y los exactos (deducidos a nalíticamente en las referencias correspondientes) es excelente. Se obser va sin embargo, que el número de gdl activos en el elemento HE2 es menor, con la ventaja computacional consiguiente. Por el contrario en este elemento, dada la excesiva continuidad impuesta en los vértices, los resultados que implican alta derivación, como son los esfuerzos cortantes, se deterioran. Con relación a los elementos ES incluso, con mallas tan simples como las 1×1 , se deducen resultados de movimientos (w) muy aceptables a partir de un cierto valor de N ($N \geq 4$). Se observa que dada la estructu

ra interna -polinomios a trozos- de la función interpolante, los valores de los esfuerzos que representan derivadas altas de la función de campo, sólo son adecuadas para valores mas altos de N_0 bien con mallas mas finas 2×2 .

Un aspecto importante en relación con la utilización de los hiperelementos es la influencia en los resultados de la forma de introducción de las condiciones de borde. Los resultados presentados en las tablas 6 y 7 corresponden a la introducción simultánea de las condiciones esenciales y naturales (existen derivadas segundas y terceras como incógnitas básicas) en cada caso. Si se introdujesen únicamente las condiciones de borde esenciales, los resultados se deterioran de un modo significativo. Sin embargo, en ninguno de los elementos de las dos familias se ha observado una influencia apreciable en los resultados para las distintas disposiciones y orientaciones de los triángulos dentro de la malla. Por último, al estudiar flexión de placas oblicuas con elevados ángulos de esviajes obien rectangulares con elementos de lados muy diferentes se han alcanzado resultados aceptables.

9. CONCLUSIONES

Se han desarrollado dos grupos de familias jerárquicas de elementos triangulares con continuidad externa C^K . Los elementos de transición diseñados pueden ser fácilmente programados, con un planteamiento numérico, en un computador. De esta forma se alcanza una gran versatilidad en el uso de estos tipos de elementos, para los cuales, las convergencias se obtienen mediante un incremento sucesivo de las ordenes de los elementos dentro de la familia. La experimentación numérica realizada en algunos casos muestran una eficacia computacional con estos elementos en comparación con otros más simples y de menor tamaño, particularmente, en conexión con resultados que exigen un elevado grado de diferenciación (con el consiguiente ruido numérico). Sin embargo, un estudio intensivo de su convergencia y experimentación de aplicaciones se hace preciso antes de alcanzar conclusiones definitivas.

REFERENCIAS

- (1) TIMOSHENKO, S. y WOINOWSKY-KRIEGER, S. "Theory of Plates and Shells" 2^a Ed. McGraw-Hill, New York, (1959).
- (2) VLASOV, V.Z. "General Theory of Shells and its Applications in Engineering". NASA. Washington D.C. Abril, (1964).
- (3) SAMARTIN, A. y MORENO, L. "Una aplicación del método de los elementos finitos al trazado de carreteras". Revista de Obras Públicas. Febrero, (1982).
- (4) STRANG, G. y FIX, G.J. "An Analysis of the Finite Element Method". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1973).
- (5) CLOUGH, R.W. y TOCHTER, J.L. "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending". Proc. Conf. Matrix Meth. in Strice Mech. Ohio. (1956).
- (6) KANOK-NUKULCHAI, W. "A simple and efficient finite element for general shell analysis". Intal Journ Num Meth. Eng. Vol. 14 No. 2 (1979).
- (7) IRONS, B. y RAZZAQUE, A. "Experience with the patch test" en Mathematical Foundations of the Finite Element Method (Ed. A.R. Aziz). Academic Press (1972).
- (8) RICHARDSON, L.F. "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems". Trans. Roy. Soc. (London) A210 (1910).
- (9) BARLOW, J. "Optional Stress Locations in Finite Element Models" Intal Journ. Num. Meth. Eng. Vol. 10 No. 2 (1976).
- (10) LOUBIGNAC, G.; CANTIN, G. y TOLUZOT, G. "Continuous Stress Fields in Finite Element Analysis". Journ. Am. Inst. Aer. and Astr. Vol. 15 No 11 (1977).

- (11) SAMARTIN, A. "Un estudio de la exactitud del MEF. Aplicación a la barra recta a extensión". Primer Simposium Nacional sobre aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería. Barcelona. Diciembre (1982).
- (12) TAYLOR, R.L. "On completeness of shape functions for finite element analysis". Int. Journ. Num. Meth. Eng. 4 (1972).
- (13) ZIENCKIEWICZ, O.C. et al. "Isoparametric and associate elements families for two and three dimensional analysis". Chapter 13 en Finite Element Methods in Stress Analysis. Ed. I. Holand y K. Bell. Techn. Univ. de Noruega. Tapir Press Noruega, Trondheim (1969).
- (14) IRONS, B.M. y DRAPER, R.J. "Inadequacy of Nodal connections in a stiffness solution for Plate bending". Journ. Am. Inst. Aer. and Astron. Vol. 3 Mayo (1965).
- (15) BELL, R. "A refined triangular plate bending element". Int. Journ. Num. Meth. Eng. Vol. 1 (1969).
- (16) DIAZ DEL VALLE, J. y SAMARTIN, A. "Una contribución al estudio de hiperelementos finitos en flexión de placas. Publicación AE-80.4. Servicio de publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander (1980).
- (17) TORRES, J. y SAMARTIN, A. "Una familia de elementos conformes de clase C^1 ". Primer Simposium Nacional sobre aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería. Barcelona (1982).
- (18) MARCUS, H. "Die Theorie Elastischer Gewebe und Ihre Anwendung auf die Berechnung Biegsamer Platten. Springer Verlag. Berlin (1930).